$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\cdot \eta\mu \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1) Να εξετάσετε εαν η f μερικώς διαφορίσιμη [στο $(x_0,y_0)=(0,0)$]

2) " " " " " διαφορίσιμη [στο $(x_0,y_0)=(0,0)$]

3) " " " " f' συνεχώς διαφορίσιμη [στο $(x_0,y_0)=(0,0)$]

ΛΥΣΗ

1) $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\cdot\eta\mu\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-(x^2+y^2)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y\cdot\eta\mu\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-(x^2+y^2)\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\in C(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})\Rightarrow f\in C^1(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$$

Στο (0,0):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}h\cdot\eta\mu\frac{1}{|h|}=0$$

όμοια:

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$, Αρα, η f μερικώς διαφορίσιμη [στο (0,0)]

2) Αρκεί νδο $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-\overset{0}{\cancel{f(0,0)}}-\overset{0}{\cancel{\nabla f(0,0)(x,y)}}}{\|(x,y)\|}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2+y^2)\cdot\eta\mu\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\eta\mu\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$ (Μηδενική επί φραγμένη)

Άρα f είναι διαφορίσιμη στο (0,0).

3) Αρκεί ν.δ.ο. ισχύει $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(2x \cdot \eta\mu \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - (x^2+y^2)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

Απο Απειροστικό Λογισμό Ι, εύκολα αποδεικνύουμε ότι το όριο αυτό δεν υπάρχει επιλέγοντας την κατάλληλη ακολουθία

Εστω η $\left(\frac{1}{\nu\pi}, 0\right) \longrightarrow 0$

αλλα

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{\nu\pi}, 0\right) = 2 \cdot \frac{1}{\nu\pi} \cdot \eta\mu \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\nu\pi)^2}}} - \frac{1}{(\nu\pi)^2} \cdot \frac{\frac{1}{\nu\pi}}{\sqrt{\frac{1}{(\nu\pi)^2}}} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\nu\pi)^2}}} =$$

$$= \cancelto{0}{\frac{2}{\nu\pi} \cdot \eta\mu(\nu\pi)} - \frac{1}{(\nu\pi)^2} \cdot \sigma\upsilon\nu(\nu\pi) = 0 - \frac{1}{(\nu\pi)^2} \cdot (-1)^{\nu} =$$

$$= \frac{1}{(\nu\pi)^2} \cdot (-1)^{\nu+1} \longrightarrow \infty$$

Αρα, $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$. (Αρα, δεν χρειάζεται στην περίπτωση αυτή να εξετάσουμε εάν υπάρχει το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$)